МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

Н. Ф. Добрынина, Д. В. Тарасов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Учебное пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2017

УДК 519.8
Д57

Р е ц е н з е н т ы:

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и математического моделирования
Пензенского государственного университета архитектуры и строительства
А. М. Данилов;

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования
Пензенского государственного университета
Ю. Г. Смирнов

Добрынина, Н. Ф.

Д57 Математическое моделирование в экономике : учеб. пособие / Н. Ф. Добрынина, Д. В. Тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2017. – 68 с.

ISBN 978-5-906975-03-4

Содержатся необходимые теоретические сведения для успешного выполнения лабораторных работ по курсу «Основы экономической синергетики». Даны описание методики выполнения, варианты задач, пример оформления необходимых расчетов работы. Изложение материала сопровождается детальным описанием вычислительных алгоритмов математического моделирования и требует от обучающихся проведения сравнительного анализа эффективности предложенных методов.

Издание подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика» ПГУ и предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Математическое моделирование в экономике и технике» по курсу «Основы экономической синергетики», а также других направлений при изучении математического моделирования в экономике.

УДК 519.8

ISBN 978-5-906975-03-4

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 4
ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ 5
Понятие операционного исследования 5
Классификация и принципы построения математических моделей 5
Порядок выполнения работ 6
Часть I. ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ 7
I.1. Постановка задачи линейного программирования 7
I.2. Линейное программирование в экономике 8
Лабораторная работа № 1. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 10
Лабораторная работа № 2. СИМПЛЕКС-МЕТОД 15
Лабораторная работа № 3. ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ 25
Часть II. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ 42
II.1. Постановка задачи нелинейного программирования 42
Лабораторная работа № 4. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗНП 43
Лабораторная работа № 5. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА 47
ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ 52
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 54
ПРИЛОЖЕНИЕ 55

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие к проведению лабораторных работ «Математическое моделирование в экономике» вводит студентов в сложный курс экономических проблем. Они позволяют проводить исследования экономической задачи на адекватной математической модели, отражающей проблему в абстрактной форме, и позволяют учесть большое число разнообразных характеристик, от которых зависит эта проблема. Анализ и расчет математической модели дают возможность выбрать оптимальные решения поставленной задачи и обосновать этот выбор.

Пособие посвящено изучению линейных и нелинейных математических моделей, способов их построения, методов расчета и их применения к решению задач. В нем подробно и доступно даны математические методы расчета приведенных моделей.

В первой части пособия рассматриваются линейные математические модели. Формулируются задачи линейного программирования и определяется линейное программирование в экономике. Первая лабораторная работа посвящена графическому методу решения задачи линейного программирования. Определяется основная задача линейного программирования. Во второй лабораторной работе разбирается симплекс-метод. В третьей работе решается двойственная задача линейного программирования в экономической интерпретации. В этой модели разобраны методы «северо-западного угла», минимального элемента, а также оптимальный план транспортной задачи и метод потенциалов.

Во второй части учебного пособия разбираются нелинейные математические модели. Четвертая лабораторная работа решает задачи нелинейного программирования графическим методом. Пятая лабораторная работа объединяет в себе решение задач нелинейного программирования графическим методом и методом множителей Лагранжа.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Понятие операционного исследования

Выделяют следующие *этапы операционного исследования*:

1) наблюдение явления и сбор исходных данных;

2) постановка задачи;

3) построение математической модели;

4) расчет модели;

5) тестирование модели и анализ выходных данных;

6) применение результатов исследований.

Операционное исследование является итерационным процессом, и каждый следующий шаг приближает исследователя к решению стоящей перед ним проблемы. В центре операционного исследования находятся построение и расчет математической модели.

Для изучения математического моделирования используются следующие определения:

Определение 1. Математическая модель – это система математических соотношений, приближенно, в абстрактной форме описывающих изучаемый процесс или систему.

Определение 2. Экономико-математическая модель – это математическая модель, предназначенная для исследования экономической проблемы.

Математические модели применяются для анализа, прогнозирования и выбора оптимальных решений в различных областях экономики – это планирование и оперативное управление производством, управление трудовыми ресурсами, управление запасами, распределение ресурсов, планировка и размещение объектов, руководство проектом, распределение инвестиций.

Классификация и принципы построения математических моделей

Можно выделить следующие основные этапы построения математической модели:

1. Определение цели, т.е. чего хотят добиться, решая поставленную задачу.

2. Определение параметров модели, т.е. заранее известных фиксированных факторов, на значения которых исследователь не влияет.

3. Формирование управляющих переменных, изменяя значения которых можно приближаться к поставленной цели. Значения управляющих переменных являются решениями задачи.

4. Определение области допустимых решений, т.е. тех ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.

5. Выявление неизвестных факторов, т.е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.

6. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, т.е. формирование целевой функции, называемой также критерием эффективности или критерием оптимальности задачи.

Введем следующие условные обозначения:

α – параметры модели;

x – управляющие переменные;

X – область допустимых решений;

ξ – случайные или неопределенные факторы;

W – целевая функция или критерий эффективности (критерий оптимальности):

$$W = W(x, \alpha, \xi).$$

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$W = W(x, \alpha, \xi) \to \max(\min),$$

$$x \in X.$$

Решить задачу – это значит найти такое оптимальное решение $x^* \in X$, чтобы при данных фиксированных параметрах α и с учетом неизвестных факторов ξ значения критерия эффективности W было по возможности максимальным (минимальным).

Порядок выполнения работ

1. Получить у преподавателя задание на выполнение очередной работы (вариант и дополнительные указания).

2. Разработать структуру и алгоритм решения данной лабораторной работы.

3. Реализовать алгоритм в виде текста на языке MathCAD.

4. Подготовить текстовые наборы данных, необходимых для отладки программы и демонстрации ее работоспособности.

5. Отладить полученную программу, используя подготовленные ранее текстовые наборы данных, и сравнить полученные результаты с ожидаемыми результатами. В случае совпадения можно сделать вывод, что программа работает правильно. В противном случае необходимо продолжить отладку программы.

6. Отлаженную программу исполнить в пошаговом режиме с остановками в контрольных точках, тщательно проверяя полученные промежуточные результаты.

7. Подготовить и сдать преподавателю отчет о работе.

Часть I. ЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Большое число экономических задач сводится к линейным математическим моделям. Традиционно оптимизационные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Под линейным программированием понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана-решения в задачах с линейной структурой.

I.1. Постановка задачи линейного программирования

В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом.

Максимизировать (минимизировать) функцию

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(I.1)}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (i = \overline{1, m_1}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{m_2 + 1, m}), \end{cases} \qquad \text{(I.2)}$$

где $x_j, j = \overline{1, n}$, – управляющие переменные или решения задачи (I.1)–(I.2);

$b_j, a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n},$ – параметры;

f – целевая функция или критерий эффективности задачи.

Функция (I.1) – линейная, ограничения (I.2) – линейные. Задача содержит n переменных и m ограничений.

Решить задачу линейного программирования – это значит найти значения управляющих переменных $x_j, j = \overline{1, n}$, удовлетворяющих ограничениям (I.2), при которых целевая функция (I.1) принимает минимальное или максимальное значение.

В зависимости от вида целевой функции (I.1) и ограничений (I.2) можно выделить несколько типов задач линейного программирования или линейных моделей: общая линейная задача, транспортная задача, задача о назначениях.

I.2. Линейное программирование в экономике

Приведем примеры некоторых типичных экономических и производственных задач, оптимальное решение которых может быть найдено с помощью построения и расчета соответствующих линейных математических моделей.

Планирование производства

Для изготовления различных видов изделий используются различные ресурсы. Общие запасы каждого ресурса, количество ресурса каждого типа, затрачиваемого на изготовление одного изделия каждого вида, и прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого вида, заданы. Нужно составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную суммарную прибыль от реализации изделий.

Построение математической модели

Математическую модель строим по этапам:

1. Целью является максимизация прибыли.

2. Задача решается в общем виде, поэтому для определения параметров введем обозначения:

n – число различных видов изделий;

m – число различных типов ресурсов;

b_i – запас ресурса i-го типа, $i=\overline{1,m}$;

a_{ij} – количество ресурсов i-го типа для изготовления одного изделия j-го вида, $i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n}$;

p_j – прибыль от реализации одного изделия j-го вида.

3. Управляющие переменные x_j, $j=\overline{1,n}$, – число изделий j-го вида.

4. Ограничения задачи – это ограничения по ресурсам и условия неотрицательности управляющих переменных.

Таким образом, можно построить математическую модель

$$P = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max. \qquad (I.3)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (I.4)$$

Формулы (I.3), (I.4) являются линейной математической моделью поставленной задачи. В результате ее расчета определяют оптимальный план производства, т.е. количество изделий каждого вида, которые надо изготовить, чтобы была максимальная прибыль (I.3) и не был превышен запас ресурсов (I.4).

К типичным задачам линейного программирования относятся следующие задачи:

1) планирование производства,

2) формирование минимальной потребительской продовольственной корзины;

3) расчет оптимальной загрузки оборудования;

4) раскрой материала;

5) составление плана реализации товара.

Существует несколько методов решения задач линейного программирования. Рассмотрим их в лабораторных работах.

Лабораторная работа № 1

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Если число переменных в задаче линейного программирования (ЗЛП) равно двум, а ограничением является система неравенств, то задачу можно решить графическим методом.

Пример 1.1. При продаже двух видов товара используются 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара и общий объем каждого ресурса заданы в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 2 усл. ед., второго вида – 3 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товаров, обеспечивающий торговому предприятию максимальную прибыль.

Решение. Данная задача является задачей составления плана реализации товара при $n = 2, m = 4$.

Математическая модель имеет вид

$$P = 2x_1 + 3x_2 \to \max, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 4x_1 \le 16. \\ 4x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

В модели управляющие переменные x_1, x_2 – количество реализуемых изделий первого и второго вида, соответственно; P – прибыль. Система неравенств включает ограничения по ресурсам. Количество ресурсов на реализацию товаров первого и второго вида не превышает общего количества ресурсов каждого типа.

1.1. Графическое решение

Построим на плоскости x_1ox_2 область допустимых решений (рис. 1.1). Каждое неравенство системы (1.2) определяет на плоскости x_1ox_2 полуплоскость, лежащую выше или ниже прямой, определяемой соответствующим уравнением. Построим прямые

$$2x_1 + 2x_2 = 12;$$
$$x_1 + 2x_2 = 8;$$
$$4x_1 = 16;$$
$$4x_2 = 12;$$
$$x_1 = 0;$$
$$x_2 = 0.$$

Рассмотрим точку с координатами $x_1 = 0; x_2 = 0$. Подставим их в первое неравенство, получаем $0 \le 12$ – верно, следовательно, искомая полуплоскость лежит ниже прямой $2x_1 + 2x_2 = 12$; остальные полуплоскости находятся аналогичным образом.

Область $OABCD$ – область решения задачи.

Для нахождения максимального значения P проверим граничные точки из области решений.

Построим две линии уровня:

$$2x_1 + 3x_2 = 6;$$
$$2x_1 + 3x_2 = 12.$$

Функция f возрастает в направлении вектора-нормали $\vec{n} = (2;3)$, следовательно, минимум находится в точке $(0,0)$. Максимум определяем, передвигая нашу линию уровня в направлении вектора $\vec{n}$ параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна точка не будет принадлежать области допустимых решений.

В данном случае это точка: $x_1 = 4, x_2 = 2;$ При этом $P = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14.$

Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 14 усл. ед. надо продать 4 изделия первого вида и 2 изделия второго вида.

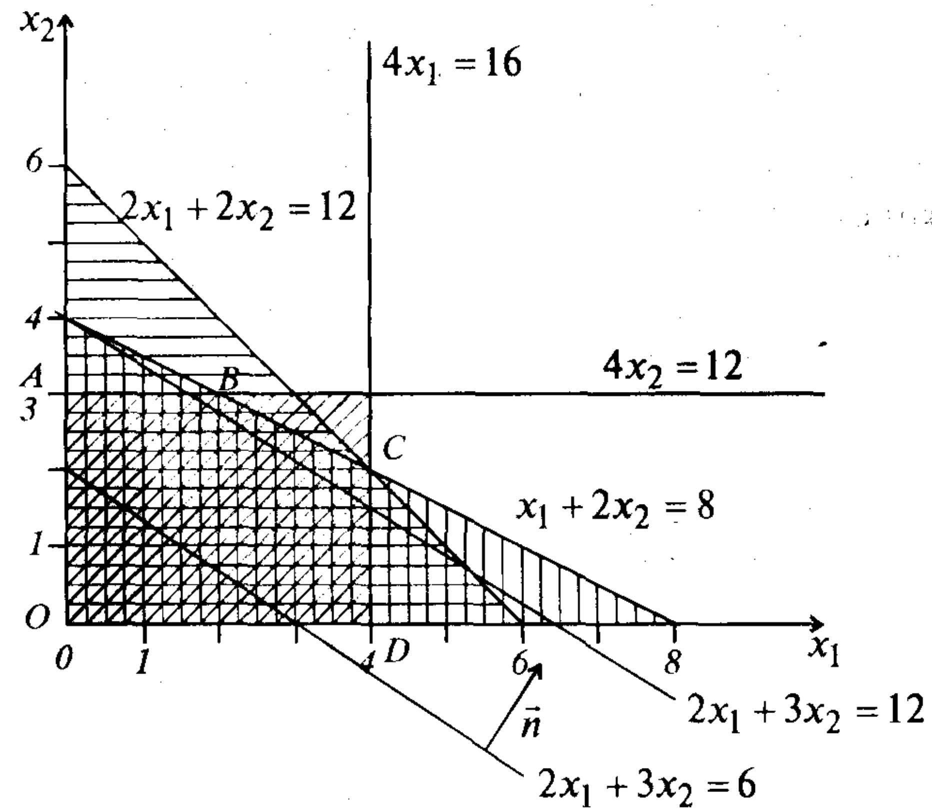

Рис. 1.1. Область допустимых решений

Графический метод применим для решения задач линейного программирования следующего вида:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min), \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, i = \overline{1, m_1}, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \ge b_i, i = \overline{m_1 + 1, m}. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2. Алгоритм решения ЗЛП графическим методом

1. Записывают уравнения прямых, соответствующих ограничениям (1.4), и строят их на плоскости x_1ox_2.

2. Определяют области, в которых выполняются ограничения задачи. Для этого выбирают произвольную точку на плоскости x_1ox_2 и подставляют ее координаты в правую часть одного из неравенств.

Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка; в противном случае искомая полуплоскость лежит в противоположной стороне от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств (1.4).

3. Определяют область допустимых решений задачи как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям задачи.

4. Определяют направление возрастания (убывания) целевой функции f. Это можно сделать двумя способами. Можно построить вектор-нормаль $\vec{n}-(c_1,c_2)$, его направление показывает направление возрастания функции f, в противоположном направлении функция убывает. Можно просто построить две линии уровня функции $f=K_1; f=K_2$ (K_1,K_2 – произвольные константы, $K_1 \neq K_2$), и по их расположению определить направление возрастания (убывания) функции.

5. Определяют граничную точку (точки) области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.

6. Вычисляют значения найденной точки, решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Возможны следующие варианты области допустимых решений (рис. 1.2, 1.3).

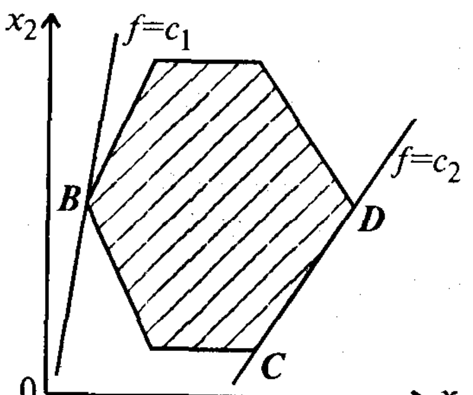

Рис. 1.2. Область допустимых решений – замкнутое множество (многоугольник)

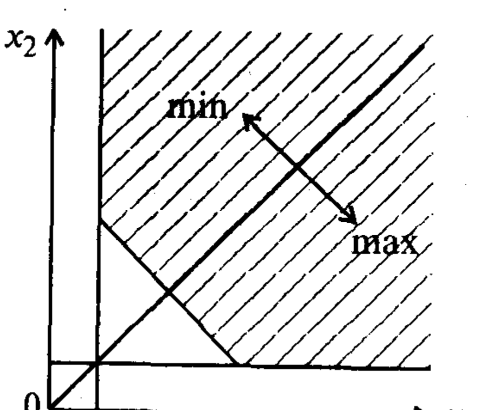

Рис 1.3. Область допустимых решений – открытое множество

Область допустимых решений – пустое множество – и единственная точка показаны на рис. 1.4, 1.5.

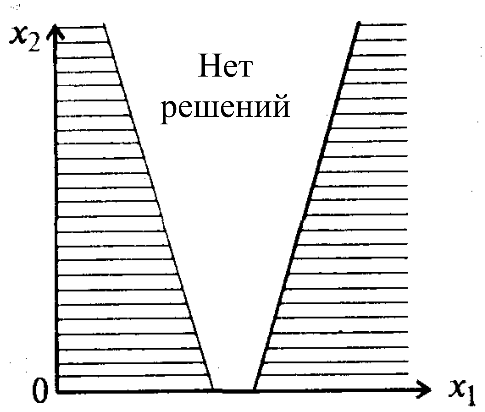

Рис. 1.4. Область допустимых решений – пустое множество (система ограничений несовместна)

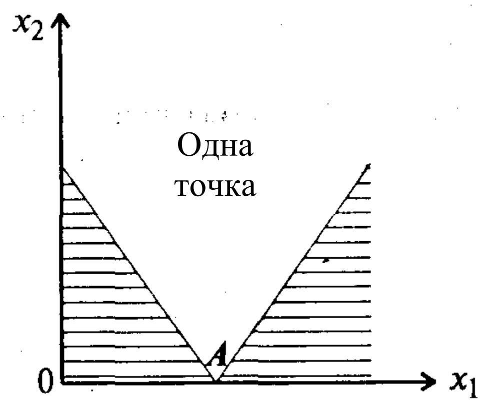

Рис. 1.5. Область допустимых решений состоит из единственной точки A

На рис. 1.2, 1.3 показаны варианты пересечения линии уровня целевой функции с областью допустимых решений. Может быть единственное решение – точка B, бесконечно много решений – отрезок CD (см. рис. 1.2), максимальным (минимальным) значением целевой функции может быть ∞ (см. рис. 1.3).

Лабораторная работа № 2

СИМПЛЕКС-МЕТОД

2.1. Основная задача линейного программирования

Наиболее распространенный метод решения задачи линейного программирования – симплекс-метод. В случае двух переменных область допустимых решений представляет собой замкнутый многоугольник. Для n переменных областью допустимых решений является многомерный многогранник, подобный симплексу. Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника. Симплекс-метод заключается в последовательном целенаправленном обходе вершин симплекса. В каждой следующей граничной точке симплекса значение целевой функции в общем случае улучшается.

Для применения симплекс-метода задачу следует записать в канонической форме:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{2.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

В канонической форме записи все переменные неотрицательны, ограничениями являются уравнения, и требуется найти такие значения x_j, $j = \overline{1,n}$, при которых целевая функция имеет максимум.

Переход к канонической форме записи производится с помощью следующих действий:

1. Если требуется найти минимум f, то заменяя f на A_2, переходят к задаче максимизации, так как $\min f = -\max(-f)$.

2. Если ограничение содержит неравенство со знаком $\leq$, то от него переходят к равенству, добавляя в левую часть ограничения дополнительную неотрицательную переменную.

3. Если ограничение содержит неравенство со знаком $\geq$, то от него переходят к равенству, вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную.

4. Если в задаче какая-либо из переменных произвольна, то от нее избавляются, заменяя ее разностью двух других неотрицательных переменных. Например, для произвольной $x_k = (x_k', x_k'') = x_k' - x_k''$, где $x_k' \geq 0,\ x_k'' \geq 0$.

Пример 2.1.

Записать в канонической форме задачу

$$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

$$f_1 = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3.$$

Вычитая дополнительную неотрицательную переменную x_4 из левой части первого неравенства, переходим к равенству.

Добавляя дополнительную неотрицательную переменную к левой части второго неравенства, также переходим к равенству.

Произвольную переменную x_3 заменяем разностью двух неотрицательных переменных $x_3 = x_6 - x_7, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$.

Окончательно получаем каноническую форму записи:

$$f_1 = -5x_1 - 2x_2 + 3x_6 - 3x_7 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_6 - x_7 - x_4 = 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_6 + 2x_7 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_6 - 7x_7 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0. \end{cases}$$

Задача (2.1)–(2.3) называется основной задачей линейного программирования (ОЗЛП).

ОЗЛП не всегда имеет решение.

Во-первых, уравнения (2.2) могут оказаться несовместными.

Во-вторых, уравнения (2.2) могут оказаться совместными не в области неотрицательных решений.

В-третьих, допустимые решения уравнений (2.2), (2.3) существуют, но среди них нет оптимального: функция f не ограничена в области допустимых решений.

Предположим, что все уравнения (2.2) линейно независимы, т.е. выражают независимые друг от друга условия задачи. Если это не так, то лишние уравнения надо просто исключить. Задачу (2.1)–(2.3) имеет смысл решать, когда число уравнений в системе ограничений (2.2) меньше числа входящих в них неизвестных: $m < n$. В противном случае, если $m = n$, то система (2.2) имеет единственное решение, и задача максимизации функции (2.1) не имеет смысла; если $m > n$, то система (2.2) переопределена и в общем случае не имеет решений.

Если $m < n$, то система (2.2) имеет бесконечное множество решений и среди них можно выбрать оптимальное, доставляющее максимум функции (2.1).

2.2. Решение задачи симплекс-методом

Симплекс-метод является методом направленного перебора решений системы (2.2), (2.3). Каждое следующее решение улучшает значение целевой функции.

Симплекс-метод включает два этапа:

1) определение начального решения, удовлетворяющего ограничениям (2.2), (2.3);

2) последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения задачи (2.1)–(2.3).

Любое решение задачи линейного программирования называется опорным планом задачи.

Система (2.2) содержит m линейно независимых уравнений, и их число меньше числа неизвестных, входящих в систему, следовательно, систему (2.2) можно разрешить относительно m неизвестных, например $x_1, x_2, \dots, x_m$, выразив их через остальные неизвестные:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Переход осуществляется с помощью элементарных алгебраических преобразований, включающих умножение правой и левой частей уравнений на одно и то же число и их сложение и не влияющих на значение решений системы (2.2).

После этих преобразований задача (2.1)–(2.3) запишется в следующем виде:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.5}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Форма записи (2.4)–(2.6) называется стандартной.

2.3. Алгоритм решения системы (2.4)–(2.6) симплекс-методом

Шаг 1. Получение начального решения.

Выбираются m переменных, называемых базисными и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 в остальные уравнения системы (2.5).

Остальные $n - m$ переменных называются свободными.

Все свободные переменные полагают равными 0, а базисные переменные – равными правым частям соответствующих ограничений системы (2.5).

Пусть m базисных переменных – это переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$. В противном случае переменные всегда можно перенумеровать. Тогда начальное решение X_0 имеет следующий вид:

$$X_0 = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\}.$$

Если все $b_i \geq 0, i = \overline{1,m}$, то начальное решение является допустимым. Переходят к шагу 2. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

Шаг 2. Выражение функции f только через свободные переменные:

$$f = \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j.$$

Переход к шагу 3.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

Составляем симплекс-таблицу (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных								Свободнее члены
	x_1	x_2	…	x_m	…	x_p	…	x_n	
x_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1m}	…	a_{1p}	…	a_{1n}	b_1
x_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2m}	…	a_{2p}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
x_q	a_{q1}	a_{q2}	…	…	…	…	…	…	b_q
…	…	…	…	a_{qm}	…	a_{qp}	…	…	…
x_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mm}	…	a_{mp}	…	a_{qn}	b_m
f	$-c_1$	$-c_2$	…	$-c_m$	…	$-c_p$	…	$-c_n$	0

В левой колонке симплекс-таблицы находим базисные переменные, в колонке свободных членов – правые части соответствующих ограничений. В i-й строке, j-м столбце стоит коэффициент при j-й переменной в i-м ограничении (2.5), $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. В последней строке ($f$-строке) стоит коэффициент с противоположным знаком при j-й переменной в целевой функции f. В столбце свободных членов в последней строке стоит значение свободного члена, входящего в целевую функцию.

Для проверки решения на оптимальность просматривается последняя f-строка. Если коэффициенты, стоящие при свободных переменных, неотрицательны, то полученное решение оптимально. Полученное решение единственно, если все эти коэффициенты положительны. Если среди неотрицательных коэффициентов встречается хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество решений. Если в последней строке есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а в соответствующем этому коэффициенту столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция f не ограничена на области допустимых решений. Если хотя бы один из коэффициентов, стоящих при свободных переменных, отрицательный и в соответствующем ему столбце есть хотя бы один положительный элемент, то полученное решение может быть улучшено. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Получение нового решения.

Шаг 4.1. Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

Просматриваем последнюю строку симплекс-таблицы. Среди элементов этой строки выбирается максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Столбец, в котором стоит этот элемент, называется разрешающим. Пусть, например, это p-й столбец. Переменная x_p, стоящая в этом столбце, вводится в список базисных переменных.

Шаг 4.2. Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

Находим отношение элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца. При делении на отрицательный элемент и 0 результат полагают равным $+\infty$. Среди этих отношений находят минимальное. Строка, соответствующая минимальному отношению, называется разрешающей. Пусть, например, это q-я строка. Базисная переменная x_q, стоящая в этой строке, выводится из списка базисных переменных. Элемент симплекс-таблицы a_{qp}, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется разрешающим элементом.

Шаг 4.3. Выполнение симплекс-преобразования и переход к новой симплекс-таблице.

Элемент a_{ij}' новой симплекс-таблицы вычисляется с помощью следующего симплекс-преобразования:

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{qj}/a_{qp}, i = q, \\ a_{ij} - a_{ip}a_{qj}/a_{qp}, i \neq q, \\ i = \overline{1, m+1}, \;\; j = \overline{1, n+1}, \\ a_{m+1j} = -c_j, \\ a_{in+1} = b_i. \end{cases} \tag{2.7}$$

Таким образом, при переходе к новой симплекс-таблице все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент (2.7), а все остальные элементы симплекс-таблицы, включая коэффициенты целевой функции и свободные члены, пересчитываются по формуле (2.7).

Новое решение имеет следующий вид: все свободные переменные полагаются равными 0, а все базисные переменные полагаются равными свободным членам, стоящим в одной строке с ними.

После построения новой симплекс-таблицы следует вернуться к шагу 3.

Рассмотрим некоторые шаги алгоритма на примерах.

Пример 2.1.

$$f = 2x_1 - 3x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ -5x_1 - 3x_2 + x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Базисные переменные – x_3, x_4.

Свободные переменные – x_1, x_2. Начальное решение

$$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 6, x_4 = 7\}.$$

Симплекс-таблица имеет вид табл. 2.2.

Таблица 2.2

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных				Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	–1	2	1	0	6
x_4	–5	–3	0	1	7
f	–2	3	0	0	0

Значение f можно увеличить, увеличивая значение переменной x_1, так как ей соответствует положительный коэффициент в формуле для f и, соответственно, отрицательный коэффициент в последней строке симплекс-таблицы. Из системы ограничений видно, что при любом увеличении значения x_1 можно подобрать значения x_3, x_4, при которых будет выполняться система ограничений. Следовательно, функция f будет бесконечно возрастать и не будет ограниченной на области допустимых решений.

Пример 2.2.

$$f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_3 \le 15, \\ 5x_1 + 3x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 8x_2 \le 20. \end{cases}$$

Запишем задачу в каноническом виде, для этого введем дополнительные переменные x_4, x_5, x_6.

Начальное решение:

$X_0 = \{x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 15, x_5 = 7, x_6\} = 20$.

Функция $f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ уже выражена через свободные переменные, поэтому можно перейти к составлению симплекс-таблицы (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных						Свободные члены
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	3	–1	1	0	0	15
x_5	1	0	3	0	1	0	7
x_6	–2	8	0	0	0	1	20
f	–5	2	–3	0	0	0	0

Ввод переменной в список базисных переменных означает, что ей приписывается отличное от 0 положительное значение, т.е. ее значение увеличивается. Из формулы для целевой функции $f = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3$ видно, что увеличение значения x_2 приводит к уменьшению f. Переменную x_2 бессмысленно вводить в список базисных переменных. Увеличение переменных x_1 и x_3 приводит к увеличению значения f, при этом на большую величину значение изменяется с увеличением x_1, следовательно, переменная x_1 должна стать базисной переменной. Максимальное значение коэффициента при x_1 в формуле для f соответствует максимальному по абсолютной величине отрицательному элементу в последней строке симплекс-таблицы. Следовательно, понятен выбор новой базисной переменной.

Для определения переменной, выводимой из списка базисных переменных, надо в соответствии с алгоритмом симплекс-метода найти отношения элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца свободных членов и среди них выбрать минимальное значение:

$$\min\left\{\frac{15}{3};\frac{7}{1};\frac{20}{-2}\right\} = \{5;7;+\infty\} = 5.$$

Следовательно, из списка базисных переменных надо вывести x_4, стоящую в первой строке симплекс-таблицы, и разрешающий элемент $a_{11} = 3$.

Поясним этот выбор. Если перейти от симплекс-таблицы к ограничениям, то это значит, что x_1 надо выразить из первого уравнения начального решения x_0 через остальные переменные, включая x_4, и, подставив его во второе и третье уравнения начального решения, и исключить оттуда x_4. Поясним, почему выбор пал на x_4.

Попробуем вывести из списка базисных другую переменную, например x_5. Для этого выразим x_1 через x_5 и остальные переменные из второго уравнения системы и подставим первое и третье уравнения системы:

$$x_1 = 7 - 3x_3 - x_5.$$

Подставив x_1 в первое уравнение, получим

$$3(7 - 3x_3 - x_5) + 3x_2 - x_3 + x_4 = 15;$$

$$3x_2 - 10x_3 + x_4 - 3x_5 = -6.$$

Подставив x_2 во второе уравнение, получим

$$-2(7 - 3x_3 - x_5) + 8x_2 + x_6 = 20;$$

$$8x_2 + 6x_3 + 2x_5 + x_6 = 34.$$

Окончательно имеем:

$$3x_2 - 10x_3 + x_4 - 3x_5 = -6;$$

$$x_1 + 3x_3 + x_5 = 7;$$

$$8x_2 + 6x_3 + 2x_5 + x_6 = 34.$$

x_1, x_4, x_6 – базисные переменные, поэтому решение имеет вид

$$X_1 = \{x_1 = 7, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = -6, x_5 = 0, x_6\} = 34.$$

В этом решении $x_4 = -6$, что противоречит условию задачи $x_4 \geq 0$, следовательно, X_1 не является допустимым решением, и, таким образом, переменную x_5 нельзя вывести из списка базисных переменных.

Вывод из списка базисных переменных переменной x_6 означает, что x_1 надо выразить через x_6 из последнего уравнения исходной системы ограничений. Получившаяся при этом правая часть уравнения будет являться значением базисной переменной x_1 в новом решении.

Выразив x_1 через x_6, получим

$$-2x_1 + 8x_2 + x_6 = 20;$$

$$x_1 - 4x_2 - \frac{x_6}{2} = -10.$$

В новом решении $x_1 = -10$, что противоречит условию неотрицательности x_1, поэтому на шаге 4.2 пренебрегают делением на отрицательное число, полагая равным $+\infty$ результат от деления.

Лабораторная работа № 3

ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ

Одной из задач линейной оптимизации является транспортная задача. Она используется для моделирования и оптимизации экономических проблем, связанных с формированием оптимального плана перевозок, оптимального распределения индивидуальных контрактов на транспортировки. Критерием эффективности в данной задаче является линейная функция, ограничения также линейны, поэтому для ее решения могут применяться методы линейной оптимизации, например симплекс-метод. Однако специальная структура этой задачи позволяет разработать более удобные методы их решения. В этой лабораторной работе даны общая формулировка задачи, основные термины и определения, этапы построения математической модели, способы получения оптимального решения.

3.1. Построение транспортной модели

Построим транспортную модель для конкретной задачи.

Пример 3.1.

Четыре предприятия данного экономического района для производства продукции используют некоторое сырье. Спрос на сырье каждого предприятия соответственно составляет: 120, 50, 190 и 110 усл. ед. Сырье сосредоточено в трех местах. Предложения поставщиков сырья равны: 160, 140, и 170 усл. ед. На каждое предприятие сырье может завозиться от любого поставщика. Тарифы перевозок известны и задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 9 & 8 \\ 9 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

В i-й строке j-м столбце матрицы C стоит тариф на перевозку сырья от i-го поставщика j-му потребителю, $i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4.$ Под тарифом понимается стоимость перевозки единицы сырья.

Требуется составить план перевозок, при которых общая стоимость перевозок минимальна.

Построение математической модели

Цель задачи состоит в минимизации суммарной стоимости на перевозки. Эта цель может быть достигнута с помощью оптимальной организации перевозок сырья. Следовательно, за неизвестные можно принять количество сырья, перевозимого от каждого поставщика каждому потребителю.

Пусть x_{ij} – количество сырья, перевозимого от i-го поставщика j-му потребителю. Параметры задачи – число поставщиков и потребителей, предложение и спрос сырья в каждом пункте, тарифы на перевозки.

Ограничения задачи – это ограничения на спрос и предложение сырья. Предложения сырья всех поставщиков не должны быть меньше суммарного спроса на него во всех пунктах потребления. В данной задаче имеет место точное равенство между предложением и спросом:

$$120 + 50 + 190 + 110 = 160 + 140 + 170 = 470.$$

Количество сырья, вывозимого от каждого поставщика, должно быть равно начальному количеству сырья. Количество сырья, доставленное каждому потребителю, должно равняться его спросу. Последнее ограничение – условие неотрицательности x_{ij}.

Критерием эффективности (целевой функцией) являются суммарные затраты S на перевозку, равные сумме произведений тарифов на перевозку на количество перевозимого сырья от каждого поставщика каждому потребителю.

Окончательно математическая модель задачи имеет вид

$$S = 7x_{11} + 8x_{12} + x_{13} + 2x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} +$$
$$+8x_{24} + 9x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \to \min,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 170, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120, \\ x_{12} + x_{22} + x_{31} = 50, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 190, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 170, \\ 160 + 140 + 170 = 120 + 50 + 190 + 170, \\ x_{ij} \ge 0, i = 1,2,3; \ j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Целевая функция и ограничения линейны, т.е. данная задача относится к задачам линейного программирования, однако благодаря особой структуре эта задача получила специальное название: транспортная задача или транспортная модель.

3.2. Сбалансированные и несбалансированные транспортные модели

В общем случае транспортная задача имеет следующий вид: дано m поставщиков продукции одного вида и n потребителей; предложение каждого i-го поставщика составляет a_i единиц, $i=\overline{1,m}$; спрос каждого j-го потребителя – b_i единиц, $j=\overline{1,n}$; тарифы перевозок равны $c_{ij}, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}.$ Требуется определить оптимальный план перевозок продукции (т.е. количество продукции, перевозимой от каждого поставщика каждому потребителю), при котором суммарная стоимость перевозок минимальна. Транспортная модель строится при условии линейной зависимости стоимости перевозок от количества перевозимой продукции.

Пусть x_{ij} – количество продукции, перевозимой от i-го поставщика j-му потребителю, $i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}.$

Формально транспортная задача записывается следующим образом:

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i, i=\overline{1,m}, & (3.2)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}\ge b_j, j=\overline{1,n}, & (3.3)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_i\ge\sum\limits_{j=1}^{n}b_j, & (3.4)\\ x_{ij}\ge 0, i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}. & (3.5)\end{cases}$$

Определение 3.1.

Совокупность чисел $(x_{ij}), i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}$; удовлетворяющая ограничениям (3.2)–(3.5), называется планом перевозок или планом транспортной задачи.

Решить транспортную задачу – это значит найти такие значения $x_{ij}\left(i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}\right)$, которые удовлетворяют ограничениям (3.2)–(3.5) и доставляют минимум целевой функции (3.1). Целевая функция (3.1) определяет суммарную стоимость перевозок. Ограничения (3.2) соответствуют тому, что количество продукции, вывозимой от i-го поставщика, не должно превосходить предложения i-го поставщика. Ограничения (3.3) соответствуют тому, что количество продукции, ввозимой j-му потребителю, должно полностью удовлетворять спрос j-го потребителя. Ограничения (3.4) соответствуют тому, что суммарное предложение не должно быть меньше суммарного спроса.

Определение 3.2.

Задача (3.1)–(3.5) называется несбалансированной транспортной моделью (задачей)

Определение 3.3.

Задача (3.1)–(3.5), в которой ограничения (3.2)–(3.4) имеют вид равенств, называется сбалансированной транспортной моделью (задачей).

Можно показать, что любую несбалансированную транспортную задачу можно свести к сбалансированной.

Пусть суммарное предложение больше суммарного спроса, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.6}$$

Введем фиктивного $(n+1)$-го потребителя, спрос которого

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

а тариф на перевозку этому потребителю от всех поставщиков равен 0 и тогда

$$C_{in+1} = 0, i=\overline{1,m}.$$

Очевидно, при этом неравенства (3.2) и (3.3) перейдут в равенство, и к ним добавится ограничение (равенство) для $(n+1)$-го пункта потребления:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j .$$

В реальных условиях суммарное предложение может быть меньше суммарного спроса, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j . \qquad (3.7)$$

Транспортные задачи, содержащие ограничение (3.7), также являются несбалансированными и могут быть сведены к сбалансированным с помощью ввода фиктивного $(m+1)$-го поставщика, предложение которого

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i ;$$

стоимость перевозки от $(m+1)$-го поставщика нулевая:

$$C_{m+1\,j} = 0,\ \ j = \overline{1,n}.$$

Неравенство (3.7) перейдет в равенство:

$$\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Рассмотрим сбалансированную транспортную задачу

$$S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \qquad (3.8)$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i ; i = \overline{1,m}, & (3.9) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j ; j = \overline{1,n}, & (3.10) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j , & (3.11) \\ x_{ij} \ge 0, i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}. & (3.12) \end{cases}$$

Для решения задачи может быть применен симплекс-метод, но особая структура (все ограничения имеют вид равенств, неизвестные входят с коэффициентами, равными 1) позволяет решать ее более простыми методами.

Составляем транспортную табл. 3.1.

Таблица 3.1

Номер поставщика	Номер потребителя						Предложение
	1	2	…	j	…	n	
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}	a_j
…	…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Спрос	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n	–

В левой колонке и верхней строке таблицы записаны соответственно номера поставщиков и потребителей. В правой колонке и нижней строке записаны, соответственно, предложения каждого поставщика и спрос каждого потребителя. В правом верхнем углу графы, стоящей на пересечении i-й строки и j-го столбца, обозначен тариф c_{ij} на перевозку от i-го поставщика j-му потребителю $(i = \overline{1,m}; j = 1,n)$.

Решение транспортной задачи записывают в графы транспортной таблицы: на пересечении i-й строки и j-го столбца записывается значение x_{ij}.

Решение транспортной задачи состоит из двух этапов:

1-й этап. Нахождение начального плана перевозок $x_{ij} = \overline{1,m};$ $j = \overline{1,n}$, удовлетворяющего ограничениям (3.9)–(3.12).

2-й этап. Улучшение начального плана перевозок и получение оптимального плана перевозок $x_{ij} = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$, доставляющего минимум функции (3.8).

Общее число неизвестных в транспортной задаче равно $m \cdot n$. Уравнения (3.9), (3.10) не являются линейно-независимыми, так как их правые части связаны условием (3.11). Число линейно-независимых уравнений в ограничениях транспортной задачи равно $m+n-1$. Таким образом, число неизвестных больше числа связывающих их уравнений, как и в основной задаче линейного программирования.

Систему уравнений (3.9), (3.10) можно разрешить относительно $m+n-1$ базисных переменных. Остальные $mn-(m+n-1)$ переменных являются свободными. Каждое решение транспортной задачи находят следующим образом: свободные $mn-(m+n-1)$ переменные полагаются равными нулю, а базисные $m+n-1$ переменные находят из системы ограничений (3.9)–(3.10). Полученное решение проверяют на оптимальность. Если решение не оптимальное, то осуществляют переход к новому решению путем изменения списка базисных переменных. Эти действия повторяют до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение, доставляющее минимум целевой функции (3.8).

3.3. Определение начального плана транспортировок. Методы «северо-западного угла» и минимального элемента

Рассмотрим два метода нахождения начального решения транспортной задачи: метод «северо-западного угла» и метод минимального элемента.

Метод «северо-западного угла»

Шаг 1. Составление транспортной таблицы.

Шаг 2. Транспортную таблицу начинают заполнять с левого верхнего (северо-западного) угла. При заполнении двигаются по строке вправо и по столбцу вниз. В клетку, находящуюся на пересечении первой строки и первого столбца, помещается максимально возможное число единиц продукции, разрешенное ограничениями на предложение и спрос: $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и предложение первого поставщика полностью исчерпано. Первая строка вычеркивается, и двигаются по столбцу вниз. В первую клетку, находящуюся на пересечении первого столбца и второй строки, помещается максимально возможное число единиц продукции, разрешенное ограничениями на предложение и спрос: $x_{21} =$ $= \min(a_2, b_1 - a_1)$. Если $b_1 - a_1 < a_2$, то $x_{21} = b_1 - a_1$. Спрос первого потребителя удовлетворен. Первый столбец вычеркивают и двигаются по второй строке вправо. Заполнив клетку, стоящую на пересечении второй строки и второго столбца, переходят к заполнению следующей третьей клетки второй строки либо второго столбца. Процесс продолжают до тех пор, пока не исчерпается предложение и не удовлетворится спрос. Последняя заполненная клетка находится в последнем n-м столбце и последней m-й строке.

Пример 3.2.

Определить начальное решение по методу «северо-западного угла» для транспортной задачи из примера 3.1.

Решение.

Транспортная таблица имеет вид табл. 3.2.

Таблица 3.2

№ п/п	1	2	3	4	Предложение
1	7 120	8 40	1	2	160
2	4	5 10	9 130	8	140
3	9	2	3 60	6 110	170
Спрос	120	50	190	110	–

В первую клетку помещают $x_{11} = \min(160, 120) = 120$. Спрос первого потребителя полностью удовлетворен, первый столбец вычеркивают. Остаток сырья в первом пункте составляет 160 – 120 = 40 усл. ед. Двигаемся по первой строке вправо: $x_{21} = \min(160 - 120, 50) = 40$. Предложение поставщика исчерпано, первая строка вычеркивается. Второму потребителю не хватает 50 – 40 = 10 усл. ед. Двигаемся по второму столбцу вниз: $x_{22} = \min(140, 50 - 40) = 10$. Второй столбец вычеркивается. Двигаемся по второй строке вправо: $x_{23} =$

$= \min(140-10, 90) = 130$. Вторая строка вычеркивается. Двигаемся по третьему столбцу вниз $x_{33} = \min(170, 190-130) = 60$. Спрос третьего потребителя удовлетворен. Двигаемся по третьей строке вправо: $x_{34} = \min(170-160, 110) = 110$. Таблица заполнена. Число ненулевых значений $x_{ij}, i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4},$ равно 6. Число базисных переменных задачи 3 + 4 – 1 = 6. Остальные $3 \cdot 4 - 6 = 6$ переменных являются свободными, их значения равны нулю. Начальный план перевозок имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_{11} = 120 & x_{12} = 40 & x_{13} = 0 & x_{14} = 0 \\ x_{21} = 0 & x_{22} = 10 & x_{23} = 130 & x_{24} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 0 & x_{33} = 60 & x_{34} = 110 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок по этому плану составляет

$$S_1 = 120 \cdot 7 + 40 \cdot 8 + 10 \cdot 5 + 130 \cdot 9 + 60 \cdot 3 + 110 \cdot 6 = 3220.$$

Метод «северо-западного угла» – наиболее простой метод нахождения начального решения. План перевозок, полученный по этому методу, обычно далек от оптимального плана.

Метод минимального элемента

Шаг 1. Составление транспортной таблицы.

Шаг 2. Выбор клетки таблицы, которой соответствует минимальное значение тарифа, и переход на шаг 3.

Шаг 3. Постановка в выбранную клетку аналогично методу «северо-западного угла» максимально возможного числа единиц продукции, разрешенного ограничениями на предложение и спрос. После этого, если предложение производителя исчерпано, вычеркивают соответствующую строку; если спрос удовлетворен, вычеркивают соответствующий столбец.

Если все клетки заполнены или вычеркнуты, то план перевозок построен. В противном случае возвращаются к шагу 2 без учета заполненных и вычеркнутых клеток.

Пример 3.3.

Определить начальное решение по методу минимального элемента транспортной задачи из примера 3.1. Решение записано в табл. 3.3.

Таблица 3.3

№ п/п	1	2	3	4	Предложение
1	7	8	1 160	2	160
2	4 120	5	9	8 20	140
3	9	2 50	3 30	6 90	170
Спрос	120	50	190	110	–

Минимальный тариф $c_{13}=1, x_{13}=\min(160{,}190)=160$. Первую строку вычеркивают. Минимальный тариф для оставшихся клеток $c_{32}=2, x_{32}=\min(170{,}50)=50$. Второй столбец вычеркивают.

Для оставшихся клеток минимальный тариф: $c_{33}=3, x_{33}=\min(170-50{,}190-160=30)$. Третий столбец вычеркивают.

Для оставшихся клеток минимальный тариф: $c_{21}=4, x_{21}=\min(140{,}120)=120$. Первый столбец вычеркивают.

Для оставшихся клеток минимальный тариф: $c_{34}=6, x_{34}=\min(170-50-30{,}110)=90$. Для одной оставшейся клетки $x_{24}=\min(140-120{,}110-90)=20$.

План перевозок, полученный по методу минимального элемента, имеет вид

$$X_1=\begin{pmatrix} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=160 & x_{14}=0 \\ x_{21}=120 & x_{22}=0 & x_{23}=0 & x_{24}=20 \\ x_{31}=0 & x_{32}=50 & x_{33}=30 & x_{34}=90 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок по этому плану составляет

$$S_2=160\cdot 1+120\cdot 4+20\cdot 8+50\cdot 2+30\cdot 3+90\cdot 6=1530.$$

Стоимость перевозок, полученная по методу минимального элемента, обычно бывает меньше стоимости перевозок, полученной по методу «северо-западного угла».

Получаем $S_2<S_1$. Для одной и той же транспортной задачи получены различные начальные планы перевозок, построенные с использованием разных методов. При этом затраты на перевозки составляют соответственно $S_1=3220, S_2=1530$. Изложенные методы нахождения начального решения не единственные. Существует метод

Фогеля. Он наиболее трудоемкий, однако начальный план перевозок, построенный с его использованием, обычно бывает близок к оптимальному плану.

3.4. Оптимальный план транспортной задачи. Метод потенциалов

Определение 3.4. Если при решении транспортной задачи число заполненных клеток транспортной таблицы равно $m+n-1$, (где m – число производителей, n – число потребителей), то план перевозок невырожденный.

Определение 3.5. Если число заполненных клеток транспортной таблицы меньше $m+n-1$, то план перевозок вырожденный.

Вырожденный план перевозок получится, если на каком-то шаге одновременно удовлетворяется спрос потребителя и исчерпывается предложение соответствующего поставщика, т.е. одновременно вычеркиваются строка и столбец.

Для нахождения оптимального плана перевозок необходимо уметь оценивать полученный план на оптимальность. Как это сделать, не имея в распоряжении всех возможных планов перевозок, которые можно было бы сравнить между собой? Для оценки плана на оптимальность вводят понятие косвенных затрат. Косвенные затраты – это затраты, получаемые для маршрутов, по которым не осуществляются перевозки при данном плане. Рассчитанные косвенные затраты сравниваются с реальными затратами, которые имели бы место, если бы перевозки по данным маршрутам осуществлялись. Если для всех невыбранных маршрутов косвенные затраты не больше реальных, то данный план перевозок является оптимальным. Если хотя бы для одного маршрута косвенные затраты больше реальных, то план перевозок может быть улучшен путем введения в него нового маршрута. Ввод нового маршрута в план перевозок соответствует вводу в список базисных переменных переменной транспортной задачи, соответствующей этому маршруту. Эти рассуждения лежат в основе ряда методов, применяемых для нахождения оптимального плана перевозок. Рассмотрим один из них – метод потенциалов.

3.5. Получение оптимального плана транспортной задачи с использованием метода потенциалов

Шаг 1. Получение начального плана перевозок по методу «северо-западного угла», минимального элемента или любым другим методом.

Шаг 2. Проверка плана на невырожденность. Если полученный план вырожденный, формально заполняют нулями некоторые из свободных клеток так, чтобы общее число занятых клеток было равно $m+n-1$. Нули надо расставлять так, чтобы не образовался замкнутый цикл из занятых клеток.

Шаг 3. Проверка плана на оптимальность.

Шаг 3.1. Определение потенциалов производителей и потребителей. Составляем систему уравнений для заполненных клеток транспортной таблицы:

$$U_i + V_j = C_{ij},$$

где U_i – потенциал i-го поставщика; V_j – потенциал j-го потребителя; C_{ij} – тариф на перевозку из пункта i в пункт j, i, j – номера строк и столбцов, на пересечении которых стоят заполненные клетки.

Число уравнений в системе равно $m+n-1$, а число неизвестных выбирают произвольно. Обычно полагают $U_i = 0$. Решая систему уравнений, находим значения потенциалов U_i и V_j; $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Шаг 3.2. Определение суммы потенциалов (косвенных тарифов) для свободных клеток:

$$C1_{pq} = U_q + V_p,$$

где $C1_{qp}$ – косвенные тарифы; U_q – потенциал q-го поставщика; V_p – потенциал p-го потребителя, q и p – номера строк и столбцов, на пересечении которых стоит свободная клетка.

Шаг 3.3. Проверка на оптимальность.

Для каждой свободной клетки транспортной таблицы составляется разность между $C1_{qp}$ и C_{qp} (косвенным и реальным тарифами) $\Delta_{qp} = C1_{qp} - C_{qp}$. Если все $\Delta_{qp} \le 0$, то полученный план оптимален. Если хотя бы для одной свободной клетки $\Delta_{qp} > 0$, то план может быть улучшен. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. Улучшение плана.

Шаг 4.1. Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

Выбираем клетку, которой соответствует максимальное положительное значение разности, полученное на шаге 3.3. Если имеется несколько одинаковых значений, то из них выбираем любое.

Переменная транспортной задачи, соответствующая этой клетке, вводится в список базисных переменных, т.е. данная клетка транспортной таблицы заполняется.

Шаг 4.2. Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

Заполнение клетки, выбранной на шаге 4.1, происходит следующим образом. Строят цикл, начинающийся и заканчивающийся в выбранной свободной клетке, содержащий в качестве вершин заполненные клетки таблицы и состоящий из горизонтальных и вертикальных отрезков.

При этом в каждой клетке таблицы, являющейся вершиной цикла, соединяют обязательно горизонтальный и вертикальный отрезки. В свободной клетке условно ставят знак «+», а в остальных вершинах цикла, чередуясь, ставят «–» и «+». Затем происходит перераспределение продукции по циклу. Для этого выбираем клетку со знаком «–», которой соответствует наименьшее число единиц продукции. Это значение прибавляем к значениям, стоящим в клетках со знаком «+», и отнимаем от значений, стоящих в клетках со знаком «–». При таком перераспределении общий баланс не изменяется. Свободная клетка заполняется. А клетка со знаком «–», которой соответствует наименьшее количество продукции, становится свободной; соответствующую ей переменную исключают из списка базисных.

Для нового плана повторяют все действия, т.е. возвращаемся к шагу 2.

Пример 3.4.

Найти оптимальный план перевозок для транспортной задачи из примера 3.1.

Решение.

В качестве начального плана выберем план, найденный по методу минимального элемента (табл. 3.4).

Таблица 3.4

№ п/п	1	2	3	4	Предложение
1	7	8	–1 160	+ 2	160
2	4 120	5	9	8 20	140
3	9	2 50	3 30 +	6 90 –	170
Спрос	120	50	190	110	–

Число заполненных клеток равно 4 + 3 – 1 = 6, т.е. данный план невырожденный. Определим потенциалы производителей и потребителей, составив уравнения $U_i + V_j = C_{ij}$ для заполненных клеток:

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 1, \\ U_2 + V_1 = 4, \\ U_2 + V_4 = 8, \\ U_3 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_3 = 3, \\ U_3 + V_4 = 6. \end{cases}$$

Решение системы:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 4, \quad U_3 = 2.$$

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 1, \quad V_4 = 4.$$

Составим разности для свободных клеток:

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - C_{11} = (0 + 0) - 7 = -7,$$

$$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = (0 + 0) - 8 = -8,$$

$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = (0 + 4) - 2 = 2,$$

$$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) - C_{22} = (4 + 0) - 5 = -1,$$

$$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) - C_{23} = (4 + 1) - 9 = -4,$$

$$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = (2 + 0) - 9 = -7.$$

Получена положительная разность $\Delta_{14} = 2$. Заполним клетку первой строки и четвертого столбца. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в этой клетке. Вершинами цикла являются клетки: (3,4), (3,3), (1,3) (на первом месте стоит номер строки, на втором – столбца) (см. табл. 3.4). В клетке (1,4) ставим «+», в (3,4) – «–», в клетке (3,3) – «+», в (1,3) – «–». Перераспределяем продукцию по циклу. Минимальное значение для клеток со знаком «–» находится в клетке (3,4): $x_{34} = 90$. Отнимаем 90 от значений, стоящих в клетках со знаком «–», и прибавляем к значениям, стоящим в клетках со знаком «+». Получаем новый план перевозок, представленный в транспортной табл. 3.5.

Таблица 3.5

№ п/п	1	2	3	4	Предложение
1	7	8	–1 70	+ 2 90	160
2	4 120	5 +	9	8 20 –	140
3	9	2 50 –	3 120 +	6	170
Спрос	120	50	190	110	–

Новый план невырожденный. Проверим его на оптимальность:

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 1, \\ U_1 + V_4 = 2, \\ U_2 + V_1 = 4, \\ U_2 + V_4 = 8, \\ U_3 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_3 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, находим

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 6, \quad U_3 = 2.$$

$$V_1 = -2, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 1, \quad V_4 = 2.$$

Составим разности

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - C_{11} = -2 - 7 = -9,$$
$$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = 0 - 8 = -8,$$
$$\Delta_{22} = (U_2 - V_2) - C_{22} = 6 - 5 = 1,$$
$$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) - C_{23} = 7 - 9 = -2,$$
$$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = 0 - 9 = -9,$$
$$\Delta_{34} = (U_3 - V_4) - C_{34} = 4 - 6 = -2.$$

Положительная разность $\Delta_{22} = 1$. Заполним клетку (2.2). Цикл будет содержать клетки: (2,2), (3,2), (3,3), (1,3), (1,4), (2,4), (2,2).

Минимальное значение $x_{24} = 20$ для клеток со знаком «–». Перераспределив продукцию по циклу, получим новый план перевозок, представленный в табл. 3.6.

Таблица 3.6

№ п/п	1	2	3	4	Предложение
1	7	8	1 50	2 110	160
2	4 120	5 20	9	8	140
3	9	2 30	3 140	6	170
Спрос	120	50	190	110	–

Проверим полученный невырожденный план на оптимальность:

$$\begin{cases} U_1 + V_3 = 1, \\ U_1 + V_4 = 2, \\ U_2 + V_1 = 4, \\ U_2 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_3 = 3. \end{cases}$$

Решение системы:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 5, \quad U_3 = 2.$$
$$V_1 = -1, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 1, \quad V_4 = 2.$$

Составляем разности:

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - C_{11} = -1 - 7 = -8,$$
$$\Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = 0 - 8 = -8,$$
$$\Delta_{22} = (U_2 - V_3) - C_{22} = 6 - 9 = -3,$$
$$\Delta_{24} = (U_2 + V_4) - C_{23} = 7 - 8 = -1,$$
$$\Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = 1 - 9 = -8,$$
$$\Delta_{34} = (U_3 - V_4) - C_{34} = 4 - 6 = -2.$$

Все разности отрицательные, следовательно, получен оптимальный план:

$$X^* = \begin{pmatrix} x_{11} = 0 & x_{12} = 0 & x_{13} = 50 & x_{14} = 110 \\ x_{21} = 120 & x_{22} = 20 & x_{23} = 0 & x_{24} = 0 \\ x_{31} = 0 & x_{32} = 30 & x_{33} = 140 & x_{34} = 0 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные затраты:

$$S_* = 50 \cdot 1 + 110 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 30 \cdot 2 + 140 \cdot 3 = 1430.$$

Часть II. НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

II.1. Постановка задачи нелинейного программирования

Задача нелинейного программирования (ЗНП) формулируется следующим образом:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max(\min), \tag{II.1}$$

$$\begin{cases} g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \le b_i, & i = \overline{1, m_1}, \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & \\ g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \ge b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases} \tag{II.2}$$

где x_j – управляющие переменные или решения ЗНП, $j = \overline{1, n}$; b_i – фиксированные параметры, $i = \overline{1, m}$; f, g_i, $i = \overline{1, n}$ – заданные функции от n переменных.

Если f и g_i – линейны, то задача (II.1), (II.2) переходит в задачу линейного программирования.

Решить задачу нелинейного программирования – это значит найти такие значения управляющих переменных x_j, $j = \overline{1, n}$, которые удовлетворяют системе ограничений (II.2) и доставляют максимум или минимум функции f .

Для задачи нелинейного программирования, в отличии от линейных задач, нет единого метода решения. В зависимости от вида целевой функции (II.1) и ограничений (II.2) разработано несколько специальных методов решения. К ним относятся графический метод решения, метод множителей Лагранжа, квадратичное и выпуклое программирование, градиентные методы, ряд приближенных методов решения. В данном пособии рассматриваются лабораторные работы с использованием первых двух методов решения ЗНП.

Лабораторная работа № 4

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗНП

4.1. Геометрическая интерпретация задачи нелинейного программирования

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, содержащую две переменные:

$$f(x_1, x_2) \to \max(\min), \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2) \le b_i, & i = \overline{1, m_1}, \\ g_i(x_1, x_2) \le b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ g_i(x_1, x_2) = b_i, & i = \overline{m_2 + 1, m}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Система ограничений (4.2) определяет в n-мерном пространстве некоторую область, которая является областью допустимых решений задачи.

Решить ЗНП графически – это значит найти точку области допустимых решений (4.2), через которую проходит линия $f(x_1, x_2) = C$ наивысшего (наинизшего) уровня.

В отличие от задач линейного программирования эта точка может находиться как на границе, так и внутри области допустимых решений (4.2).

4.2. Алгоритм решения ЗНП графическим методом

Шаг 1. На плоскости $x_1 0 x_2$ строят область допустимых решений, определенную ограничениями (4.2). Если она пуста, то ее ограничения несовместны и задача не имеет решения. В противном случае переходят к шагу 2.

Шаг 2. Построение линии уровня функции $f(x_1, x_2) = C$, где C – некоторая константа. Переходят к шагу 3.

Шаг 3. Определение направления возрастания (при максимизации), убывания (при минимизации) функции f.

Шаг 4. Нахождение точки области допустимых решений, через которую проходит линия уровня $f(x_1, x_2) = C$ с наибольшим (при максимизации), наименьшим (при минимизации) значением C или установление неограниченности функции на области допустимых решений.

Шаг 5. Определение значений x_1, x_2 для точки, найденной на шаге 4, и величины функции f в этой точке.

Пример 4.1.

$$f = 2x_1 + 3x_2 \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 \ge 3, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

В соответствии с алгоритмом построим на плоскости $x_1 0 x_2$ область допустимых решений (рис. 4.1).

Ограничения $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ выделяют на плоскости $x_1 0 x_2$ первую четверть.

Границей полуплоскости, соответствующей первому ограничению, является гипербола

$$x_2 = \frac{3}{x_1}.$$

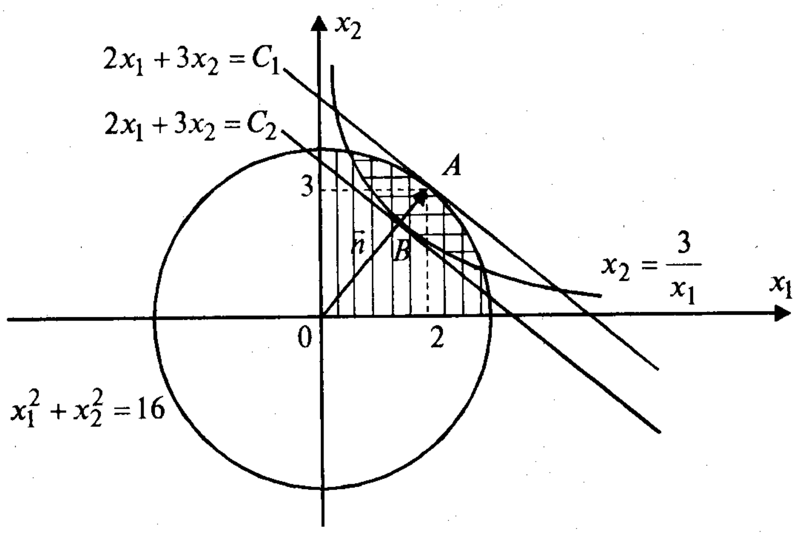

Рис. 4.1

Неравенство выполняется для точек, лежащих выше гиперболы. Границей полуплоскости, определяемой вторым ограничением, является окружность с центром в точке (0,0) и радиусом, равным 4.

Функция возрастает в направлении вектора $\vec{n}$ с координатами (2,3). Таким образом, максимум достигается в точке A, а минимум – в точке B.

Заметим, что в точке A совпадают тангенсы углов наклона касательной к окружности $x_1^2 + x_2^2 = 16$ и прямой $2x_1 + 3x_2 = C_1$ к оси Ox_1. Тангенсы углов наклона касательной и прямой к оси Ox_1 определяются значениями производных по x_1 соответствующих функций. Для прямой $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{C_1}{3}$ тангенс равен $-\frac{2}{3}$.

Продифференцируем выражение $x_1^2 + x_2^2 = 16$ как неявную функцию от x_1. Получаем

$$2x_1 + 2x_2x_2' = 0 \text{ или}$$

$$x_2' = -\frac{x_1}{x_2}.$$

Приравнивая значения тангенсов, получаем

$$-\frac{x_1}{x_2} = -\frac{2}{3};$$

$$3x_1 - 2x_2 = 0.$$

К этому уравнению добавим уравнение окружности, которой принадлежит точка A. Получаем систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 16. \end{cases}$$

Решив ее, находим оптимальное решение

$$x_1 = \frac{12}{\sqrt{13}}; \quad x_2 = \frac{12}{\sqrt{13}}; \quad f_{\max} = \frac{52}{\sqrt{13}}.$$

Аналогично определим координату точки B, в которой тангенс угла наклона к оси Ox_1 прямой $2x_1 + 3x_2 = C_2$ совпадает с тангенсом угла наклона касательной к функции $x_1x_2 = 3$.

Тогда

$$x_2 = \frac{3}{x_1},$$

$$x_2' = -\frac{3}{x_1^2}.$$

Получаем уравнение

$$-\frac{3}{x_1^2} = -\frac{2}{3}.$$

Вторым для нахождения координат точки является уравнение гиперболы, которой принадлежит точка B:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{x_1^2} = -\dfrac{2}{3}, \\ x_1 x_2 = 3. \end{cases}$$

Из последней системы находим оптимальное решение, соответствующее минимальному значению f:

$$x_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}; \quad x_2 = \sqrt{2}; \quad f_{\min} = \frac{12}{\sqrt{2}}.$$

Лабораторная работа № 5

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Требуется решить задачу нелинейного программирования следующего вида:

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \max(\min), \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} g_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_1, \\ g_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ g_m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = b_m, \end{cases} \tag{5.2}$$

где функции f и g_i, $i = \overline{1, n}$, непрерывны и непрерывны их частные производные по x_j, $j = \overline{1, n}$.

Для решения поставленной задачи может быть применен метод множителей Лагранжа. Рассмотрим идею метода на примере ЗНП, зависящей от двух переменных:

$$f(x_1, x_2) \to \max;$$

$$g(x_1, x_2) = b.$$

На плоскости $x_1 0 x_2$ уравнение $g(x_1, x_2) = b$ определяет график некоторой функции, представленной на рис. 5.1. На нем показаны несколько линий уровня некоторой функции $f(x_1, x_2)$ и выбранное в качестве примера направление ее возрастания.

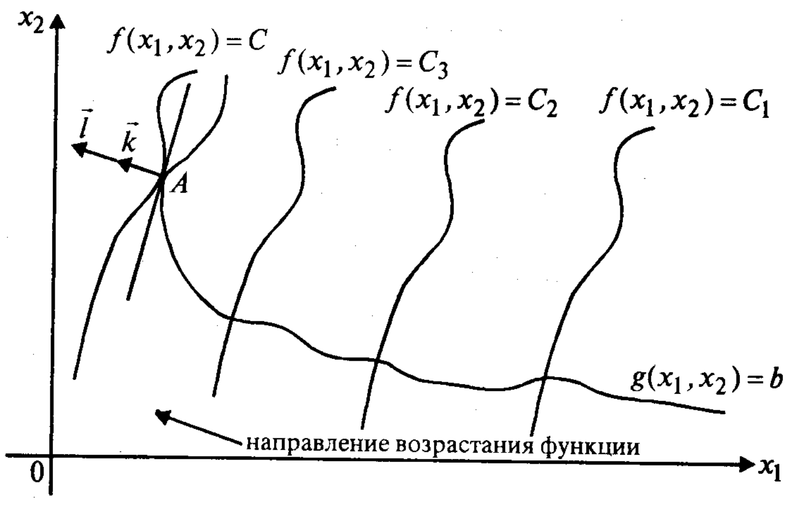

Рис. 5.1

В точке A, в которой функция $f(x_1, x_2)$ достигает максимального значения, совпадают касательные линии к графикам функций

$$f(x_1, x_2) = C; \quad g(x_1, x_2) = b.$$

Следовательно, в точке A векторы-нормали к функциям $f(x_1, x_2) = C;$ $g(x_1, x_2) = b$ пропорциональны. Обозначим эти векторы соответственно через $\vec{k}$ и $\vec{l}$. Получаем

$$\vec{l} = \lambda \vec{k},$$

где λ – некоторый коэффициент пропорциональности. Координатами векторов $\vec{k}$ и $\vec{l}$ являются значения частных производных функций f и g соответственно в точке A:

$$\vec{l} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2} \right);$$

$$\vec{k} = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}; \frac{\partial g}{\partial x_2} \right).$$

Из условия пропорциональности в точке A имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}.$$

Для определения значений x_1, x_2, в которых функция f достигает максимума, к этим условиям надо добавить условие принадлежности точки A графику функции $g(x_1, x_2) = b$.

Получаем систему уравнений, определяющую оптимальное решение поставленной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2}, \\ g(x_1, x_2) = b. \end{cases}$$

Введем новую функцию

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(b - g(x_1, x_2)).$$

Тогда последняя система перепишется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial F(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = b - g(x_1,x_2) = 0. \end{cases}$$

Функцию F называют функцией Лагранжа.

5.1. Алгоритм метода множителей Лагранжа решения задачи (5.1), (5.2)

Шаг 1. Составление функции Лагранжа:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)).$$

Шаг 2. Нахождение частных производных функции Лагранжа по x_j и λ_i, $j=\overline{1,n}$; $i=\overline{1,m}$ и приравнивание их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g}{\partial x_j} = 0, \quad j=\overline{1,n}, \\ g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) = b_i, \quad i=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{5.3}$$

Шаг 3. Решение систем (5.3) и определение точек, в которых функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ может иметь экстремум.

Шаг 4. Проверка полученных на шаге 3 точек на экстремум и определение экстремального значения функции f в найденной точке.

5.2. Расчет экономико-математической модели при нелинейных затратах на производство

Рассмотрим применение изученного метода на примере решения задачи оптимальной реализации продукции.

Пример 5.1.

Фирма реализует автомобили двумя способами: через магазин и через торговых агентов. При реализации x_1 автомобилей через магазин расходы на реализацию составляют $4x_1 + x_1^2$ усл. ед., а при продаже x_2 автомобилей через торговых агентов расходы составляют x_2^2 усл. ед.

Найти оптимальный способ реализации автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число предназначенных для продажи автомобилей составляет 200 штук.

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Целью является минимизация суммарных расходов

$$R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2.$$

Управляющие переменные – это число автомобилей, реализуемых первым и вторым способом: x_1 и x_2.

Математическая модель имеет следующий вид:

$$R = 4x_1 + x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 200, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Для ее расчета применим метод множителей Лагранжа.

Функция Лагранжа имеет вид

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + x_2 2 + \lambda(200 - x_1 - x_2).$$

Найдем частные производные F по x_1, x_2, λ и приравняем их к нулю.

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + 4 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 200 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, найдем

$$x_1 = 99, \quad x_2 = 101, \quad \lambda = 202, \quad f(x_1, x_2) = 20\,398.$$

Определитель, составленный из вторых частных производных функции f по x_1, x_2, имеет вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Следовательно, по теореме о достаточном условии существования условного экстремума функция $f(x_1, x_2)$ в точке $x_1 = 99, x_2 = 101$ действительно имеет экстремум:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2 > 0.$$

Следовательно, в этой точке функция f имеет условный минимум.

Таким образом, для получения минимальных расходов нужно реализовать 99 автомобилей через магазин и 101 автомобиль через торговых агентов. При этом расходы на реализацию составят 20 398 усл. ед.

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ

1. Моделирование. Главный признак модели.
2. Этапы моделирования экономических систем.
3. Понятие системы.
4. Классификация систем.
5. Понятийный аппарат моделирования.
6. Классификация моделей.
7. Классификация моделей в зависимости от сложности представляемых систем.
8. Классификация моделей в зависимости от представлений о характере распределения случайной величины в сложных системах.
9. Классификация моделей в зависимости от сложности, способа регулирования, организации.
10. Методы моделирования.
11. Проблема сравнения (оценки адекватности) разных моделей одного и того же явления.
12. Принципы экономической синергетики.
13. Задачи экономической синергетики.
14. Принцип рефлексивного управления в искусственных системах.
15. Становление концепции экономической синергетики в России.
16. Моделирование синергетических процессов Г. Хакеном.
17. Уравнение Ланжевена.
18. Оценка уровня флуктуаций. Уравнение Ито – Стратоновича.
19. Уравнение Чапмана – Колмогорова.
20. Модель универсального энтропийного уравнения эволюции Пригожина – Николиса.
21. «Феноменологическое уравнение Ландау – Эренфеста» для описания фазовых переходов в системах.
22. Синергетические модели: реакция Белоусова – Жаботинского, модель «Хищники–жертвы».
23. Модель солитонов Кортевега – Фриса.
24. Аттрактор Лоренца.
25. Модель самоорганизации в диссипативных структурах.
26. Модель «Куча песка».
27. Модель Д. С. Чернавского «Борьба информаций».
28. Модель «Великого шелкового пути».
29. Фракталы и мультифракталы.

30. Методология и методы прогнозирования.
31. Целевые функции прогнозирования.
32. Подходы к методике разработки прогнозов.
33. Целевые функции прогнозирования.
34. Схема процесса управления.
35. Статистические методы прогнозирования.
36. Прогнозирование одномерных процессов (метод экспоненциального сглаживания, метод прогнозирования трендов).
37. Прогнозирование многомерных процессов.
38. Специальные математические методы (сплайн-функции, теория катастроф).
39. Количественные методы прогнозирования.
40. Анализ временных рядов.
41. Каузальное (причинно-следственное) моделирование.
42. Качественные методы прогнозирования.
43. Исследовательские и нормативные прогнозы в системах управления.
44. Прогнозы, программы, планы и их связь.
45. Футуросинергетика.
46. Оптимизационные задачи в развитии социотехнических систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Исследование операций в экономике : учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 407 с.
2. Афанасьев, М. Ю. Исследование операций в экономике : учеб. пособие / М. Ю. Афанасьев, Б. И. Суворов. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 444 с. – (Серия «Высшее образование»).
3. Черноморов, Г. А. Теория принятия решений : учеб. пособие / Г. А. Черноморов ; Юж.-Рос. гос. техн. ун-т. – Новочеркасск : Ред. журн. «Известия вузов. Электромеханика», 2002. – 444 с.
4. Ларичев, О. И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах : учеб. / О. И. Ларичев. – М. : Логос, 2000. – 296 с.
5. Саати, Т. Принятие решений, метод анализа иерархий / Т. Саати ; пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
6. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики : пер. с франц. / Э. Мулен. – М. : Мир. 1985. – 200 с.
7. Галеев, Э. М. Оптимизация: теория, примеры, задачи / Э. М. Галеев, В. М. Тихомиров. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 320 с.
8. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах : учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М. : Высш. шк., 2002. – 544 с.

Дополнительная литература

9. Бережная, Е. В. Математические методы моделирования экономических систем : учеб. пособие / Е. В. Бережная, В. И. Бережной. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
10. Замков, О. О. Математические методы в экономике : учеб / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : МГУ : Дело и сервис, 1999. – 386с.
11. Ашманов, С. А. Математические модели и методы в экономике / С. А. Ашманов. – М. : Изд-во МГУ, 1980. – 199 с.
12. Колемасов, В. А. Математическая экономика : учеб. для вузов / В. А. Колемасов. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 399 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Задания к лабораторным занятиям по ОЭС

Лабораторная работа № 1

Геометрический метод решения

1. $F = 2x_1 - 6x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

2. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. $F = x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

4. $F = 2x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \le -10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

5. $F = x_1 - x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

6. $F = x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - 2x_2 \le -8, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

7. $F = 2x_1 - 6x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4 \le 0, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 4 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

8. $F = 2x_1 + x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 - x_2 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 \le -10, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

9. $F = x_1 - x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 \le -6, \\ x_1 + x_2 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

10. $F = x_1 - x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le -6, \\ x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

Лабораторная работа № 2

Решение симплекс-методом

Вариант 1. Найти $Z_{\min} = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \le -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \ge 4, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Вариант 2. Найти $F_{\min} = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4$ при ограничениях:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \ge 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \ge 4, \\ y_i \ge 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Вариант 3. Найти $Z_{\max} = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4, \\ x_j \ge 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Вариант 4. Найти $Z_{\max} = 5x_1 - x_2 - 4x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ x_1 - x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Вариант 5. Найти $Z_{\min} = 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Вариант 6. Найти $Z_{\min} = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Вариант 7. Найти $F = -x_1 + 2x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ x_1 - 4x_2 \geq -24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 8. Найти $F = x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq -2, \\ x_1 - 2x_2 \geq -13, \\ 3x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вариант 9. Найти $Z = 10y_2 - 3y_3 \to \min$ при ограничениях:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 - y_3 \ge 1, \\ y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 3, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 10. Найти $F = x_1 + x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Лабораторная работа № 3

Транспортная задача линейного программирования

Найти оптимальные планы транспортных задач, заданных в таблицах. Проверить, являются ли планы единственными; если нет, то найти другой оптимальный план и убедиться, что стоимость этих планов одинакова.

Таблица 3.1

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	2 19	5 17	3 18	4 15	6 16	7 27	8 18	151
A_2	1 16	6 14	5 7	2 20	3 18	4 19	8 15	7 20	280
A_3	6 15	3 13	7 11	4 18	5 19	1 22	2 23	8 14	415
A_4	3 14	7 12	4 12	5 17	1 21	2 23	6 14	8 14	127
A_5	7 10	4 11	5 10	1 20	2 16	8 21	3 12	6 12	220
b_i	76	69	57	93	89	101	192	60	–

Таблица 3.2

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	2 18	3 17	4 18	5 14	6 16	7 27	8 19	109
A_2	2 16	3 14	4 8	5 20	6 18	7 19	8 15	1 20	130
A_3	3 15	4 12	5 11	6 18	7 19	8 22	1 23	2 15	135
A_4	4 14	5 12	6 12	7 17	8 21	1 23	2 14	3 14	127
A_5	5 10	6 11	7 10	8 20	1 16	2 21	3 12	4 12	112
b_i	76	67	58	93	88	101	91	80	–

Таблица 3.3

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 20	2 19	5 17	3 17	4 15	6 16	7 27	8 18	750
A_2	1 16	6 14	5 7	2 21	3 18	4 20	8 15	7 21	700
A_3	6 15	3 13	7 11	4 18	5 19	1 22	2 24	8 15	300
A_4	3 14	7 12	4 12	5 17	1 21	2 23	6 14	8 14	200
A_5	7 10	4 11	5 10	1 20	2 16	8 21	3 12	6 12	100
b_i	200	300	400	250	150	100	150	300	–

Таблица 3.4

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	2 19	3 17	4 18	5 15	6 16	7 27	8 18	550
A_2	2 16	3 14	4 7	5 20	6 18	7 19	8 15	1 20	500
A_3	3 15	4 13	5 11	6 18	7 19	8 22	1 23	2 14	300
A_4	4 14	5 12	6 12	7 17	8 21	1 23	2 14	3 14	200
A_5	5 10	6 11	7 10	8 20	1 16	2 21	3 12	4 12	100
b_i	200	300	400	250	150	100	150	300	–

Таблица 3.5

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	2 19	5 17	3 19	4 15	6 16	7 27	8 19	650
A_2	1 16	6 14	5 8	2 20	3 19	4 19	8 15	7 21	600
A_3	6 15	3 13	7 10	4 19	5 19	1 22	2 23	8 14	200
A_4	3 14	7 12	4 12	5 15	1 21	2 23	6 14	8 14	100
A_5	7 10	4 11	5 10	1 21	2 16	8 21	3 12	6 12	200
b_i	100	200	300	350	250	200	250	400	–

Таблица 3.6

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 20	2 19	3 17	4 18	5 16	6 17	7 27	8 19	550
A_2	2 16	3 15	4 7	5 20	6 18	7 19	8 15	1 20	500
A_3	3 15	4 13	5 10	6 18	7 19	8 21	1 23	2 15	300
A_4	4 14	5 12	6 12	7 17	8 21	1 23	2 14	3 16	200
A_5	5 10	6 11	7 10	8 20	1 16	2 21	3 12	4 12	100
b_i	200	300	400	250	150	100	150	300	–

Таблица 3.7

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 20	2 19	5 17	3 18	4 14	6 16	7 27	8 18	550
A_2	2 16	5 14	3 7	4 20	6 18	7 19	8 15	1 20	500
A_3	5 15	3 13	4 11	6 18	7 19	8 22	1 23	2 14	200
A_4	3 14	4 12	6 12	7 17	8 21	1 23	2 14	5 14	100
A_5	4 10	6 11	7 10	8 20	1 16	2 21	5 12	3 12	200
b_i	100	300	350	250	150	100	150	300	–

Таблица 3.8

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	2 19	4 17	3 18	6 15	5 16	8 27	7 18	650
A_2	2 15	4 14	3 7	6 20	5 18	8 21	7 15	1 20	600
A_3	4 15	3 13	6 10	5 18	8 19	7 24	1 23	2 14	200
A_4	3 14	6 12	5 9	8 17	7 21	1 25	2 14	4 14	100
A_5	6 12	5 11	8 10	7 21	1 16	2 21	4 12	3 12	200
b_i	100	200	300	150	150	100	150	300	–

Таблица 3.9

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	4 19	6 17	3 18	5 15	8 16	7 27	2 18	650
A_2	4 16	6 14	3 8	5 21	8 18	7 19	2 15	1 20	600
A_3	6 14	3 13	5 11	8 18	7 20	2 22	1 23	4 14	200
A_4	3 14	5 12	8 12	7 17	2 21	1 23	4 16	6 14	100
A_5	5 10	8 11	7 10	2 20	1 16	4 21	6 12	3 12	200
b_i	200	300	400	250	150	100	150	300	–

Таблица 3.10

Поставщики	Потребители								a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	1 21	3 19	2 18	4 18	6 15	5 16	8 28	7 18	850
A_2	3 16	2 14	4 7	6 20	5 18	8 19	7 15	1 20	800
A_3	2 15	4 13	6 11	5 19	8 20	7 22	1 23	3 14	500
A_4	4 14	6 12	5 13	8 17	7 21	1 23	3 14	2 14	300
A_5	6 10	5 11	8 10	7 20	1 16	3 21	2 12	4 15	400
b_i	200	300	400	250	150	100	150	300	–

Лабораторная работа № 4

Графический метод решения задачи нелинейного программирования

Вариант 1.

Найдите глобальный экстремум функции $z = x - y - 5$ на множестве решений системы неравенств:

$$\begin{cases} (x-y)y \le 1, \\ x+y \ge 3{,}5, \\ 0 \le x \le 5, \\ 0 \le y \le 5. \end{cases}$$

Вариант 2.

Определите наибольшее значение функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при условии

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 \le 0, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 3.

Найдите глобальные экстремумы функции $z=(x-2)^2+(y-3)^2$ на множестве решений системы:

$$\begin{cases} x+2y\le 12, \\ x+y\le 9, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0. \end{cases}$$

Вариант 4.

Найдите глобальные максимум и минимум целевой функции $z=\dfrac{3x_1-x_2}{x_1+x_2}$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 5, \\ -x_1+3x_2\le 7, \\ 3x_1-x_2\le 11, \\ x_1\ge 0, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$$

Вариант 5.

На множестве решений системы ограничений:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le 36, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0 \end{cases}$$

найдите глобальные экстремумы функции $z=(x-3)^2+(y-2)^2$.

Вариант 6.

Найдите глобальные экстремумы функции $z=x^2+y^2$ на множестве ограничений:

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-3)^2\ge 9, \\ (x-5)^2+(y-3)^2\le 36, \\ x+y\ge 8, \\ x\ge 0; y\ge 0. \end{cases}$$

Вариант 7.

Найдите глобальный максимум функции $z = 2x_1 - x_1^2 + x_2$ на множестве решений системы ограничений:

$$\begin{cases} x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 8.

Найдите глобальный максимум функции $z = (x-1)^2 + (y-3)^2$ на множестве решений системы неравенств:

$$\begin{cases} x + 2y - 14 \le 0, \\ x + y \le 9, \\ 3x + y \le 21, \\ x \ge 0;\ y \ge 0. \end{cases}$$

Вариант 9.

На множестве системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 5y \le 30, \\ 2x + y \le 14, \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z = (x-4)^2 + (y-8)^2$.

Вариант 10.

На множестве системы неравенств

$$\begin{cases} 2x + 5y \le 30, \\ 2x + y \le 14, \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z = (x-7)^2 + (y-7)^2$.

Лабораторная работа № 5

Метод множителей Лагранжа

Вариант 1.
На множестве системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+5y \le 30, \\ 2x+y \le 14, \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=(x-2)^2+(y-4)^2$.

Вариант 2.
На множестве системы неравенств

$$\begin{cases} 2x+5y \le 30, \\ 2x+y \le 14, \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=(x-6)^2+(y-2)^2$.

Вариант 3.
На множестве системы неравенств

$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-3)^2 \ge 0, \\ (x-5)^2+(y-3)^2 \le 36, \\ x+y \ge 8, \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=x+y$.

Вариант 4.
На множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases} (x-2)(y-1) \le 16, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0 \end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=x+y$.

Вариант 5.

На множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases}(x-2)(y-1)\le 16,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2$.

Вариант 6.

На множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases}(x-2)(y-1)\le 16,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=(x-4)^2+(y-3)^2$.

Вариант 7.

На множестве решений системы неравенств

$$\begin{cases}(x-2)(y-1)\le 16,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0\end{cases}$$

определите глобальные экстремумы функции $z=-x+3y$.

Вариант 8.

Найдите максимальное значение функции $z=x_1\cdot x_2$ при ограничении $x_1+x_2=1$.

Вариант 9.

Найдите максимальное значение функции $z=x_1-2x_2+2x_3$ при ограничении $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$.

Вариант 10.

Определите размеры бака $a,b,h,$ имеющего форму параллелепипеда максимального объема, стоимость которого не превышает 100 000 руб. Стоимость материала 10 000 руб./м^2.

Учебное издание

Добрынина Наталия Филипповна,
Тарасов Дмитрий Викторович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЭКОНОМИКЕ

Редактор *Т. В. Веденеева*
Технический редактор *Ю. В. Анурова*
Компьютерная верстка *Ю. В. Ануровой*
Дизайн обложки *А. А. Стаценко*

Подписано в печать 24.08.2017.

Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,95.

Заказ № 488. Тираж 28.

440026, Пенза, Красная, 40. Издательство ПГУ

Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru